

**АНАЛИЗ И ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ТЕНДЕНЦИЙ ДИНАМИКИ
ПРОИЗВОДИТЕЛЬНОСТИ ТРУДА В СЕЛЬСКОМ ХОЗЯЙСТВЕ
СУБЪЕКТОВ РФ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ФУНКЦИЙ КОББА–ДУГЛАСА**

Кутенков Р.П., д.э.н., ИАГП РАН

Проводится факторный анализ производительности труда в сельском хозяйстве регионов Российской Федерации на основе выборки регионов, рассмотренной в работе [1], с использованием производственной функции Кобба-Дугласа [2]. Рассмотрены три группы регионов с посевными площадями менее 1 млн. га, от 1 до 2 млн. и свыше 2 млн. га. В качестве факторов рассмотрены: фондовооруженность сельскохозяйственного производства в регионе и среднемесячная начисленная зарплата в расчете на одного занятого в сельском хозяйстве. Расчеты проводились на основе материалов Росстата по усредненным данным за 2017-2018 гг. С использованием математических моделей и свойств функций Кобба-Дугласа, обоснованных в работе [1], построены зависимости, связывающие относительные приращения рассматриваемых факторов и производительности труда, на основе которых строились прогнозные расчеты.

Ключевые слова: регионы России, сельское хозяйство, производительность труда, ресурсные факторы, соотношения, динамика, прогнозирование, функции Кобба-Дугласа.

**ANALYSIS AND PREDICTION OF TRENDS IN THE DYNAMICS OF LABOR
PRODUCTIVITY IN AGRICULTURE OF THE SUBJECTS OF THE RUSSIAN
FEDERATION USING THE COBB-DOUGLAS FUNCTIONS**

Kutenkov R.P., doctor of economic sciences, IAgP RAS

A factor analysis of labor productivity in agriculture of the regions of the Russian Federation using the production function of Cobb-Douglas is carried out. Three groups of regions with sown areas of less than 1 million hectares, from 1 to 2 million and over 2 million hectares are considered. Capital-labor ratio of agricultural production in the region and the average monthly accrued wages per one employed in agriculture are considered as factors. Calculations were carried out on the basis of Rosstat materials based on averaged data for 2017-2018. Using mathematical models and properties of the Cobb-Douglas functions, dependencies were constructed connecting the relative increments of the factors under consideration and labor productivity, on the basis of which the forecast calculations were based.

Key words: regions of Russia, agriculture, labor productivity, resource factors, relationships, dynamics, forecasting, Cobb-Douglas functions.

Введение.

В работе [1] предложена методика прогнозирования, позволяющая с использованием свойств функции Кобба-Дугласа оценить реакцию выхода валовой продукции на изменения значений ресурсных факторов, а также рассчитать приращения факторов, необходимые для достижения заданных значений выхода валовой продукции. В данной работе эта методика обобщается применительно к задаче факторного прогнозирования производительности труда в сельском хозяйстве регионов на основе материалов отчетной статистики Росстата за 2017-2018 гг. Оценивается взаимосвязь между относительным приращением производительности труда и соответствующими относительными приращениями ресурсных факторов сельскохозяйственного производства. Эта оценка использует математическую модель, вытекающую из свойств функции Кобба-Дугласа, и позволяет решить прямую и обратную задачи моделирования, связанные, как с расчетом относительных приращений производительности труда по относительным приращениям факторов, так и с расчетом относительных приращений факторов, необходимых для достижения заданного относительного приращения производительности труда. Необходимые модели построены для групп регионов с посевными



площадями, соответственно, менее 1 млн. га, от 1 до 2 и свыше 2 млн. га, что позволяет оценить динамику производительности труда в сельском хозяйстве России в зависимости от сценариев изменения исследуемых ресурсных факторов.

Информационная база и методика расчетов.

Исследование проводилось на выборке регионов, обоснованной в [1] и в предшествующих работах автора, включающей 62 региона, в которых производится основная часть сельскохозяйственной продукции России (табл. 1). Анализировались зависимости между следующими показателями, рассчитанными для каждого региона:

P – производительность труда в сельском хозяйстве, оцениваемая как стоимость валовой продукции сельского хозяйства в регионе в расчете на одного занятого, тыс. руб.

F – фондовооруженность, оцениваемая как остаточная на конец года стоимость основных фондов сельского хозяйства в расчете на одного занятого в сельском хозяйстве региона, тыс. руб.;

Z – среднемесячная начисленная заработная плата в расчете на одного занятого в сельском хозяйстве региона, тыс. руб.

Значения перечисленных показателей рассчитывались как средние (средневзвешенные) за 2017-2018 гг. по материалам отчетной статистики Росстата [3,4].

Таблица 1 – Состав групп регионов с посевными площадями соответственно менее 1 млн. га (гр.1), от 1 до 2 (гр.2) и свыше 2 млн. га (гр. 3)

Группа	Состав группы
1	Центральный федеральный округ (ЦФО): Брянская (код объекта 102), Владимирская (103), Ивановская (105), Калужская (106), Костромская (107), Московская (110), Рязанская (112), Смоленская (113), Тверская (115), Тульская (116) и Ярославская (117) области. СЗФО: Вологодская (204), Калининградская (205), Ленинградская (206), Новгородская (208) и Псковская (209) области. ЮФО: Астраханская область (304), республики Адыгея (301) и Калмыкия (302) . СКФО: республики Дагестан (401), Кабардино-Балкарская (403) и Карачаево-Черкесская (404). ПФО: Пермский край (507), республики Марий Эл (502), Мордовия (503), Чувашия (506), а также Кировская область (508). УрФО: Свердловская область (602). СФО: – республики Алтай (701) и Хакасия (704), Иркутская (708), Кемеровская (709) и Томская (712) области. ДФО – Приморский край (803) и республика Саха (Якутия, 801). Всего 35 регионов.
2	ЦФО: Белгородская (101), Курская (108), Липецкая (109), Орловская (111) и Тамбовская (114) области. ПФО: Удмуртская республика (505), Нижегородская (509), Пензенская (511) и Ульяновская (514) области. УрФО: Курганская (601) , Тюменская (603) и Челябинская (604) области. СФО: Красноярский край (707). ДФО: Амурская обл. (805). Всего 14 регионов.
3	ПФО: республики Башкортостан (501) и Татарстан (504), области Оренбургская (510), Самарская (512) и Саратовская (513) . ЮФО: Краснодарский край (303), Волгоградская (305), Ростовская (306) области. СФО: Алтайский край (705), Новосибирская (710) и Омская (711) области. СКФО: Ставропольский край (407). ЦФО: Воронежская обл. (104). Всего 13 регионов.

Примечание: рассчитано автором по материалам Росстата

В качестве модели, описывающей взаимосвязь между производительностью труда и рассматриваемыми ресурсными факторами выбрана производственная функция Кобба-Дугласа, имеющая вид:

$$P = LF^{\delta} Z^{\lambda}, \quad (1)$$

где коэффициент L отражает влияние факторов, не включенных в модель. Показатели степеней δ , λ , (как и в работе [1]) характеризуют эластичность производительности труда по соответствующему виду ресурса и определяются, как предел отношения относительного приращения производительности труда к относительному приращению соответствующего ресурса, когда абсолютное приращение ресурса стремится к нулю. Оценки параметров L , δ , λ определяются методом наименьших квадратов по значениям показателей P, F, Z для регионов соответствующей группы с использованием линеаризованной модели (2), полученной логарифмированием модели (1):

$$\ln P = \ln L + \delta \ln F + \lambda \ln Z. \quad (2)$$



В классической постановке производственная функция Кобба-Дугласа представляет экономико-статистическую модель производства продукции, отражающую количественную зависимость между объемными показателями ресурсов и выпуска [2]. В нашем случае она используется для описания другого процесса, связанного с факторным моделированием производительности труда. Подобное использование на сущностном уровне в обоих случаях обосновывается кумулятивностью влияния факторов на выходную характеристику процесса и (на методологическом уровне) требованием необходимости статистической проверки адекватности выбранных моделей описываемым данным.

Если построенная модель оказывается статистически неадекватной описываемым данным, то ее точность может быть повышена за счет исключения отдельных регионов, в которых соотношение между значениями производительности труда и исследуемыми факторами существенно отклоняется от основной тенденции, и последующего переоценивания коэффициентов. Более подробно этот процесс описан ниже. На основе полученной в результате подобных преобразований адекватной модели строятся основные зависимости для прогнозных расчетов. Если обозначить $P = P(F, Z)$ и $P_1 = P(F_1, Z_1)$ значения функции (1) в близких точках (F, Z) и (F_1, Z_1) , то относительные приращения производительности труда и рассматриваемых ресурсных факторов можно представить в виде:

$$\mu = \frac{P_1 - P}{P}, \quad \mu_1 = \frac{F_1 - F}{F}, \quad \mu_2 = \frac{Z_1 - Z}{Z}. \quad (3)$$

Известно [1,2], что для функции Кобба-Дугласа (1) введенные относительные приращения связаны формулой

$$\mu \cong \delta\mu_1 + \lambda\mu_2, \quad (4)$$

по которой можно оценить относительный прирост (снижение) производительности труда при заданных значениях относительных приростов (снижений) фондовооруженности и средней заработной платы в сельском хозяйстве регионов, по которым построена адекватная модель (1). При решении обратной задачи, связанной с определением относительных приращений ресурсообеспеченности и средней заработной платы для обеспечения заданного относительного приращения производительности труда, можно построить серию сценарных расчетов при фиксировании значений приращения одного из факторов, определении относительного приращения другого фактора из формулы (4) и последующего выбора наиболее подходящего набора приращений.

Результаты анализа.

На рисунке 1 представлены исходные данные для оценки коэффициентов модели (2) применительно к группе 1 регионов с посевными площадями меньше 1 млн. га. По оси X указаны коды регионов из таблицы 1. Значения натуральных логарифмов показателей на рисунке 1 рассчитаны по данным Росстата [3,4], усредненным за 2017-2018 гг.

На рисунке 1 также представлены предсказанные значения логарифмов производительности труда ($\ln P^\wedge$), рассчитанные по модели вида (2) с коэффициентами, оцененными по методу наименьших квадратов:

$$\ln P^\wedge = 5,405 + 0,366 \ln F - 0,255 \ln Z, \quad R^2 = 0,57 \quad (5)$$

Уровень значимости для коэффициента при $\ln Z$ составляет 0,1; для остальных коэффициентов и R^2 – менее 0,0001. Точность модели (5) невысока, и анализ рисунка 1 позволяет ее повысить за счет исключения регионов, в которых фактическая производительность труда не соответствует уровню обеспечения исследуемыми ресурсами. В частности, из рисунка 1 видно, что в регионе с кодом 204 (Вологодская обл.) производительность труда ниже, чем, например, в регионах с кодами 107, 105, 404 и др. при более высоких значениях фондовооруженности и заработной платы. В качестве дополнительной иллюстрации отметим, что фактическая производительность труда в регионе 204 ниже предсказанной по модели (5) примерно на 5,6 %. Подобное несоответствие можно отметить также для регионов 115 и 508 (Тверская и Кировская области, также выделенные в табл. 1 курсивом). Здесь фактическая производительность труда ниже расчетной соответственно на 6,8 и 5,8 %.

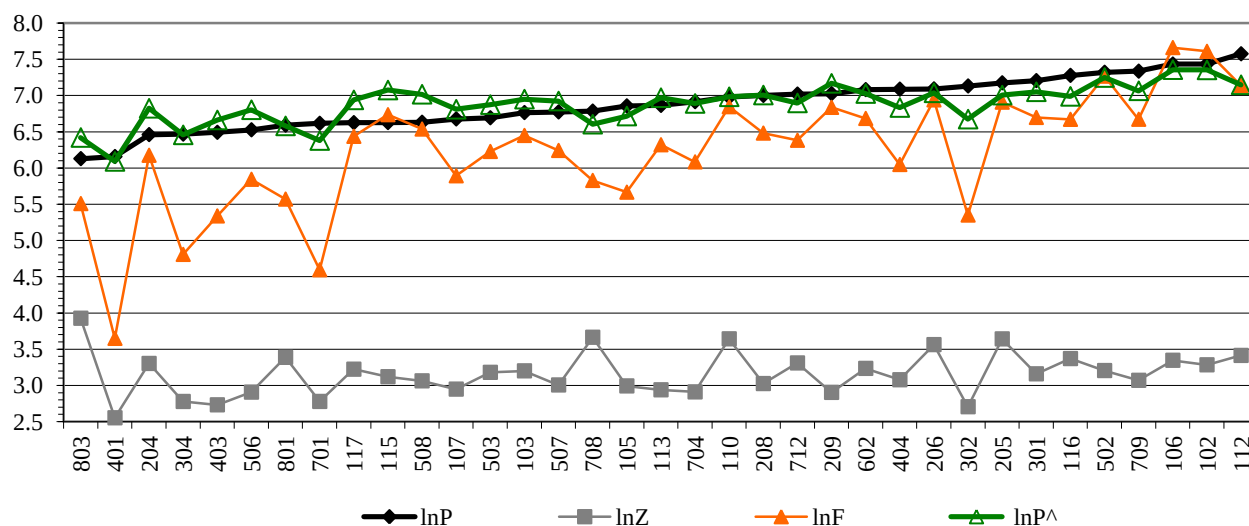


Рисунок 1 – Логарифмы фактических и предсказанных по (2) значений производительности труда ($\ln P$, $\ln P^{\wedge}$), а также соответствующих им логарифмов значений исследуемых факторов для регионов с посевными площадями менее 1 млн. га

В регионах 302, 701, 709, выделенных в табл. 1 жирным курсивом, отмечена противоположная ситуация: относительно высокие значения производительности труда достигнуты при более низкой обеспеченности рассматриваемыми видами ресурсов, и фактическая производительность превышает расчетную соответственно на 6,4; 3,6; 3,7 %..

После исключения выявленных аномальных регионов и пересчета оценок коэффициентов модель (2) для оставшихся 29 регионов первой группы примет вид:

$$\ln P^{\wedge} = 4,962 + 0,405 \ln F - 0,190 \ln Z, \quad R^2 = 0,75, \quad (6)$$

где коэффициент при $\ln Z$ существенен на уровне значимости 0,15; остальные коэффициенты и R^2 существенны на уровне значимости ниже 0,0001.

Таким образом, точность модели существенно повысилась. Соотношение (4) для уточненной модели (6) примет вид:

$$\mu \cong 0,405\mu_1 - 0,190\mu_2. \quad (7)$$

Из соотношения (7) видно, что в рамках модели Кобба-Дугласа для регионов с посевными площадями менее 1 млн. га увеличение производительности труда достигается с ростом относительного приращения фондовооруженности (μ_1) или/и снижением относительного приращения заработной платы в расчете на одного занятого в сельскохозяйственном производстве (μ_2) при выполнении условия $\mu_1 > 0,47\mu_2$.

Выполняя аналогичные вычисления для регионов второй группы (с посевными площадями от 1 до 2 млн. га), получим основное уравнение регрессии (8) и графическую иллюстрацию (рис. 2) для выделения аномальных регионов с целью уточнения модели.

Регрессионная модель для предсказания логарифмов производительности труда ($\ln P^{\wedge}$), построенная с учетом всех регионов второй группы, имеет вид:

$$\ln P^{\wedge} = 4,517 + 0,400 \ln F + 0,014 \ln Z, \quad R^2 = 0,50, \quad (8)$$

коэффициент при $\ln Z$ статистически незначим ($\alpha=0,98$), остальные коэффициенты и R^2 высоко значимы ($\alpha<0,04$).

Из рисунка 2 следует, что с учетом имеющегося ресурсного обеспечения в регионах 707 (Красноярский край) и 511 (Пензенская область) отмечена аномально низкая производительность труда (ниже расчетной на 6,6 и 4,0 %), а в Курганской области (601) – аномально высокая (выше расчетной на 7,3 %), что подтверждается расчетами по модели (8). Если исключить отмеченные регионы из рассмотрения и пересчитать оценки коэффициентов регрессии (8), то получим более точную модель (9):



$$\ln P^{\wedge} = 3,396 + 0,525 \ln F + 0,103 \ln Z, \quad R^2 = 0,82. \quad (9)$$

Как и в предшествующей модели, все коэффициенты, кроме коэффициента при $\ln Z$, статистически высоко значимы. С учетом повышенной точности модель (9) можно использовать как основу для оценки связи между относительными приращениями производительности труда и рассматриваемых ресурсных факторов (4), применяемой при прогнозировании:

$$\mu \cong 0,525\mu_1 + 0,103\mu_2. \quad (10)$$

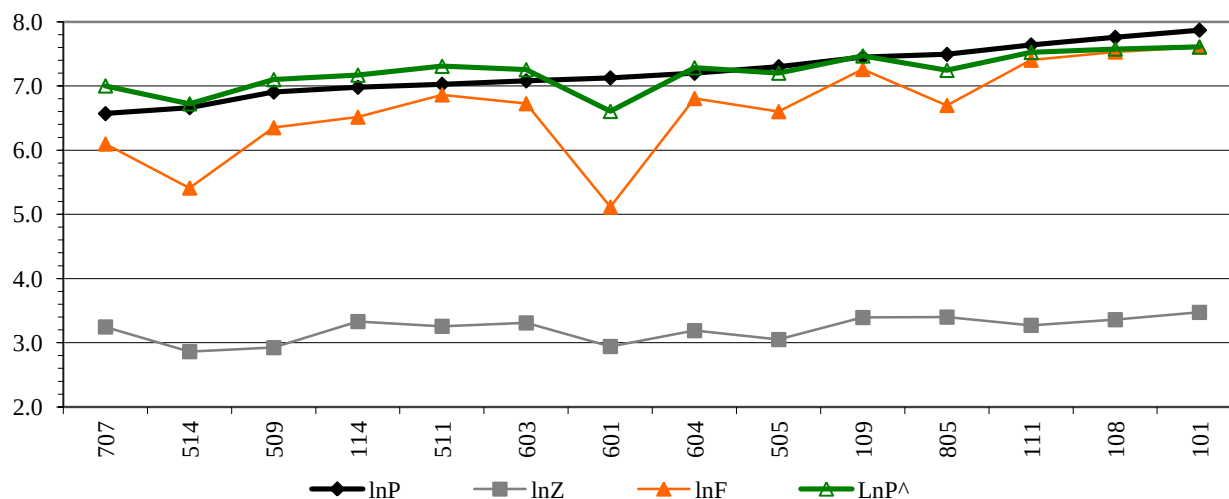


Рисунок 2– Логарифмы фактических и предсказанных значений производительности труда ($\ln P$, $\ln P^{\wedge}$), а также соответствующие значения логарифмов исследуемых факторов для регионов с посевными площадями от 1 до 2 млн. га

Результаты моделирования производительности труда в сельском хозяйстве регионов с посевными площадями свыше 2 млн. га, полученные с использованием описанной методики, кратко сводятся к следующему. Исходная модель, учитывающая данные по всем регионам, имеет вид:

$$\ln P^{\wedge} = 4,996 + 0,393 \ln F - 0,130 \ln Z, \quad R^2 = 0,38, \quad (11)$$

коэффициент при $\ln Z$ статистически незначим ($\alpha=0,72$), остальные высоко значимы ($\alpha<0,04$).

В Новосибирской области и Ставропольском крае фактические значения производительности труда в сельском хозяйстве ниже, чем рассчитанные по модели (11) на 4,5–3,5 %, соответственно, а в Саратовской области – выше на 3,3 %. Подобное несоответствие подтверждается также сопоставлением с обеспеченностью регионов рассматриваемыми видами ресурсов. После исключения отмеченных регионов и пересчета оценок коэффициентов уточненная регрессия примет вид:

$$\ln P^{\wedge} = 4,07 + 0,470 \ln F + 0,028 \ln Z, \quad R^2 = 0,77. \quad (12)$$

Как и в предыдущей модели, коэффициент при $\ln Z$ статистически незначим ($\alpha=0,92$), остальные коэффициенты и R^2 высоко значимы ($\alpha<0,01$), и соотношение между относительными приращениями производительности труда и рассматриваемых ресурсов для группы регионов с посевными площадями свыше 2 млн. га запишется в виде:

$$\mu \cong 0,470\mu_1 + 0,028\mu_2. \quad (13)$$

Наиболее существенная особенность полученных уточненных моделей состоит в том, что они выявили статистическую незначимость коэффициентов при $\ln Z$ (при стандартных уровнях значимости от 0,01 до 0,05). Это означает, что различия в заработной плате работников сельского хозяйства в регионах каждой из рассматриваемых групп столь невелики, что не оказывают существенного влияния на производительность труда. Иными словами, в рамках рассмотренных моделей производительность труда зависит исключительно от фондово-



оруженности. После исключения $\ln Z$ и пересчета коэффициентов модели (6, 9, 12) примут вид:

$$\ln P^{\wedge} = 4,565 + 0,372 \ln F, \quad R^2 = 0,74, \quad (6.1)$$

$$\ln P^{\wedge} = 3,551 + 0,551 \ln F, \quad R^2 = 0,84, \quad (9.1)$$

$$\ln P^{\wedge} = 4,118 + 0,477 \ln F, \quad R^2 = 0,80, \quad (12.1)$$

и формулы для расчета относительных приращений производительности труда по относительным приращениям фондовооруженности для трех рассмотренных групп регионов запишутся так:

$$\mu \cong 0,372 \mu_1, \quad (7.1)$$

$$\mu \cong 0,551 \mu_1, \quad (10.1)$$

$$\mu \cong 0,477 \mu_1. \quad (13.1)$$

Как видно, точность моделей после исключения $\ln Z$ со статистически незначимым коэффициентом практически не изменилась.

Из последних формул видно, что в зависимости от группы регионов увеличение производительности труда составит от 0,37 до 0,55 увеличения фондовооруженности, самое большое – во второй группе. При одном и том же относительном увеличении фондовооруженности производительность труда в сельском хозяйстве регионов второй группы увеличится в 1,48 раза больше, чем в первой группе, и в 1,16 раза больше, чем во второй. Это свидетельствует о более высокой реакции производительности труда на изменение фондовооруженности в группе регионов с посевными площадями от 1 до 2 млн. га в сопоставлении с другими группами.

Для оценки точности предложенной методики используем значения относительных приращений фондовооруженности и производительности труда в сельском хозяйстве России в целом в 2018 г в сопоставлении с 2017 годом, рассчитанные по материалам Российского статистического ежегодника в ценах 2018 г. [5]. Они составляют 0,081 и 0,025 соответственно¹. Подставляя $\mu_1 = 0,081$ в формулы (7.1, 10.1, 13.1), получим относительные приращения производительности труда в сельском хозяйстве соответственно для первой, второй и третьей групп регионов. Рассчитаем их средневзвешенное учетом численности групп значение (0,028), которое будет оценкой приведенного выше среднероссийского (0,025). Погрешность составляет 12%, что можно считать вполне приемлемым для обоснования изложенной методики.

Рассмотрим еще два характерных примера применения формул (7.1, 10.1, 13.1) в задачах, связанных с прогнозированием производительности труда в сельском хозяйстве регионов. Если, например, увеличить фондовооруженность сельского хозяйства в первой группе регионов на 10 %, во второй – на 8 % и в третьей на 5 %, то, как показывают расчеты, производительность труда возрастет, соответственно, в первой группе на 3,7 %, во второй - на 4,4 %, в третьей - на 2,4 %, а в среднем по всей рассмотренной выборке регионов – на 3,6 %. Для регионов, исключенных на более ранних этапах исследования (в табл. 1 они выделены курсивом), полученные расчетные значения следует скорректировать с учетом приведенных в статье их относительных отклонений от исходных моделей. Если требуется увеличить производительность труда во всех рассмотренных группах регионов на 10 %, то для этого в первой группе потребуется увеличить фондовооруженность примерно на 27 %, во второй - на 18 % и в третьей – на 21 %.

Заключение.

Таким образом, предложенная методика обоснована теоретически и подтверждена модельными расчетами. Она может быть рекомендована для оценки динамики производительности труда в зависимости от проектируемой динамики показателей фондовооруженности и начисленной заработной платы в сельском хозяйстве отдельных регионов, их групп и Российской Федерации в целом, а также для решения обратной задачи, связанной с расчетом

¹Рассчитано автором.



изменений рассматриваемых ресурсных факторов для достижения желаемой производительности труда.

Анализ полученных в работе моделей показал, что для повышения производительности труда необходимо устранить, как минимум, две причины системного характера. Первая связана с тем, что размер фактической заработной платы в сельском хозяйстве рассмотренных регионов не оказывает существенного влияния на рост производительности труда, и эту тенденцию следует изменить на основе более тесной увязки зарплаты с достигнутыми результатами. Вторая причина состоит в том, что в рассмотренных регионах уровень фондоотдачи находится примерно на одинаковом уровне или даже отрицательно коррелирует с производительностью труда. Отмеченные обстоятельства свидетельствуют об экстенсивности сельскохозяйственного производства. Для преодоления отмеченного недостатка следует, наряду с усилением зависимости заработной платы от достигнутого уровня производительности труда, проводить обновление основных фондов с использованием инновационных стратегий, связанных с увеличением их производительности. Актуальность последней рекомендации также связана с постоянным снижением фондоотдачи в сельскохозяйственном производстве России в целом с 2015 года со среднегодовым темпом 0,867².

Список литературы:

1. Кутенков Р.П. Математические модели и методика оценки динамики сельскохозяйственного производства с учетом оптимизации сочетаний значений ресурсных факторов // Региональные агросистемы: экономика и социология. – Саратов: ИАГП РАН. - 2020. – № 3. – С. 23-33
2. Клейнер Г.Б. Производственные функции: теория, методы, применение. – М.: ФИС, 1986. – 239 с.
3. Труд и занятость в России (информация по субъектам РФ), 2019: Стат. сб.: [Электронный ресурс] / Росстат. М., 2019. – URL: <http://www.gks.ru/>
4. Сельское хозяйство, охота и охотничье хозяйство, лесоводство в России. Приложение (субъекты РФ). 2019: Стат. сб.: [Электронный ресурс] / Росстат. М., 2019.
5. Российский статистический ежегодник. 2019: Стат. сб. [Электронный ресурс] / Росстат. М., 2019.

²Рассчитано автором по материалам [5].